PARCIAL II

Probabilidad y Estadística (ECON)

Martha Cecilia Casas

Junio 28 de 2011

Solución: Andrés Felipe Higuera

1. **[0.9] La demanda semanal de gas propano (en miles de galones) es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad esta dada por**

$$\boldsymbol{f(y) = \begin{cases} cy^3e^{-y^4}, & 0 < y < \infty \\ 0, & c.o.p \end{cases}}$$

a) **Halle el valor de c que convierte a $f(y)$ en una función de densidad.**

$$c = 4$$

b) **Halle la función de distribución F.**

$$F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y^4}, & 0 < y < \infty \\ 0, & c.o.p \end{cases}$$

c) **Si la cantidad almacenada en una semana es de 2000 galones, ¿cuál es la probabilidad de que la demanda no se satisfaga en una semana dada?**

$$P(Y > 2) = e^{-16}$$

2. **[0.8] Si una industria afirma que el contenido de su producto es de 12 onzas, la federación para la defensa del consumidor permitirá que una proporción pequeña del producto tenga menos de 12 onzas.**

a) **Si el contenido del producto Y tiene distribución normal con $\mu = 12.1$, halle σ de tal manera que $P(Y < 12) = 0.01$**

$$P(Z < -2.33) \cong 0.01$$
$$\Rightarrow \quad \sigma = 0.0429$$

b) **Si $\sigma = 0.05$, halle μ de tal manera que $P(Y < 12) = 0.005$**

$$P(Z < -2.575) \cong 0.005$$
$$\mu = 12.1288$$

3. **[0.8] El número de días que le toma a un conductor de alto riesgo tener un accidente, es una variable aleatoria Y que tiene distribución exponencial. Si $P(Y < 50) = 0.25$, halle $P(Y > 100|Y > 50)$**

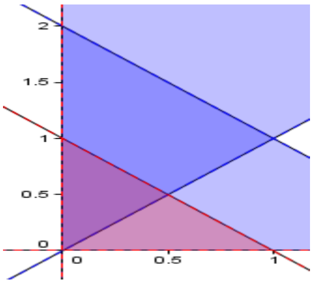
$$\beta = 173.8029$$
$$P(Y > 100|Y > 50) = 0.7499$$

4. **[1.5] Suponga que X y Y son variables aleatorias distribuidas conjuntamente y su función de densidad esta dada por**

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} 6x^2y, & si\ \ 0 \le x \le y, x + y \le 2 \\ 0, & c.o.p \end{cases}}$$

a) **Halle $P(X+Y<1)$**

$$P(X+Y<1)=\frac{1}{32}$$



b) **Muestre que la densidad marginal para X es una densidad Beta con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$**

Beta:

$$f(x)=\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(2)\Gamma(3)}x^2(1-x)$$
$$=12x^2(1-x)$$

Función de Densidad Marginal:

$$f_x(x)=6\int_x^{2-x} x^2y\,dy$$
$$=12x^2(1-x)$$

c) **Encuentre $P(Y \le 1.1 | X=\frac{3}{5})$**

$$\int_{3/5}^{1.1}\frac{f(x,y)}{f_x\left(\frac{3}{5}\right)}\,dy=\frac{17}{32}$$

5. **[1.0] La variable aleatoria X y Y están distribuidas conjuntamente y su función de densidad conjunta esta dada por**

$$p(x,y)=\frac{x+y}{32},\qquad x=1,2,\qquad y=1,2,3,4$$

Halle $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho$. Use fraccionarios o cuatro decimales. ¿Son independientes X y Y? Explique.

		Y: 1	Y: 2	Y: 3	Y: 4	
X	1	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{14}{32}$
	2	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{18}{32}$
		$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{11}{32}$	

$$\mu_X = 1.5625$$
$$\mu_Y = 2.8125$$
$$\sigma_X^2 = 0.2461$$
$$\sigma_Y^2 = 1.1523$$
$$\rho = -0.0158$$

No son independintes, en tanto $Cov(x,y) \neq 0$

Bono:

Sea X y Y variables aleatorias independientes, y sea $U = X+Y$ y $V = X-Y$. Halle la correlación entre U y V en términos de las varianzas de X y Y.

$$\rho=\frac{\sigma_X^2-\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}$$